

# ISOTRIVIALITÉ DE CERTAINES FAMILLES KÄHLÉRIENNES DE VARIÉTÉS NON PROJECTIVES

Frédéric Campana

February 1, 2008

## 1 Introduction

Soit  $f : X \rightarrow S$  est une application holomorphe surjective connexe avec  $X$  Kählérienne compacte et connexe, et soit  $X_s$  une fibre lisse non projective de  $f$ . Nous montrons que  $f$  est isotriviale si  $X_s$  est soit hyperkählérienne irréductible, soit un tore complexe général, soit la variété de Kummer associée à un tel tore. La démonstration repose sur le théorème de Torelli local pour les 2-formes, et sur le critère de projectivité de Kodaira:  $X_s$  est projective si elle n'a pas de 2-forme holomorphe non-nulle.

Nous commençons par rappeler les notions très classiques utilisées.

### 1.1 Tores simples et variétés hyperkählériennes.

Soit  $F$  une variété (lisse) Kählérienne compacte et connexe de dimension complexe  $n$ .

On dit que  $F$  est un tore complexe simple si  $F$  n'a pas de sous-tore complexe non-trivial. On introduira en 3.3 ci-dessous la notion de tore irréductible en poids 2. Ces tores sont généraux dans leur famille de déformation (voir §4).

La variété de Kummer  $F'$  de  $F$  est alors le quotient de l'éclaté  $\hat{F}$  de  $F$  en ses  $2^{2n}$  points de torsion par l'involution de  $\hat{F}$  qui relève l'involution  $x \rightarrow (-x)$  de  $F$ . On dit alors que  $F'$  est une variété de Kummer simple (resp. irréductible en poids 2) si le tore  $F$  l'est. Voir [U 75], §. 16, pp. 190-203 pour une étude détaillée de ces variétés. En particulier, lorsque  $n \geq 3$ , les petites déformations d'une variété de Kummer sont des variétés de Kummer. (Par contre, lorsque  $n = 2$ ,  $F'$  est une surface  $K3$ ).

Rappelons que  $F$  est *hyperkählérienne* si  $F$  est simplement connexe de dimension complexe paire  $n = 2m$  et admet une 2-forme holomorphe  $u$  de rang maximum  $m$  en chaque point. On dit que  $F$  est *hyperkählérienne irréductible* si, de plus,  $h^{2,0}(F) = 1$ .

Toute variété hyperkählérienne se décompose en produit de variétés hyperkählériennes irréductibles ([Bo74], [Be83] et [Y78]). Cette décomposition est unique ([Be83], théorème 2, p. 764).

On dira que la variété hyperkählérienne  $F$  est *sans facteur algébrique* si aucun des facteurs de cette décomposition n'est une variété projective. On trouvera des études approfondies et des références récentes sur les variétés hyperkählériennes dans [H03] et [V02] .

## 1.2 Fibrations.

On appellera *fibration* toute application holomorphe surjective à fibres connexes  $f : X \rightarrow S$  entre la variété analytique complexe compacte et kählérienne  $X$  et l'espace analytique complexe  $S$ . On notera  $X_s$  une fibre *générique lisse* de  $f$ , au-dessus de  $s \in S$ .

On dit que  $f$  est *isotriviale* (resp. *triviale*) si  $X_s$  et  $X_{s'}$  sont analytiquement isomorphes pour  $s, s'$  génériques dans  $S$  (resp. s'il existe une application biméromorphe  $t : S \times F \rightarrow X$  au-dessus de  $S$  qui induit par restriction un isomorphisme de  $F$  sur  $X_s$  pour  $s \in S$  générique).

Si le groupe d'automorphismes analytiques de  $X_s$  est discret, alors  $f$  est isotriviale si et seulement s'il existe un changement de base  $u : S' \rightarrow S$  génériquement fini tel que le morphisme  $f' : X' := (X \times_S S') \rightarrow S'$  déduit de  $f$  par  $u$  soit trivial.

## 1.3 Le résultat principal.

L'objectif du présent texte est de démontrer entre autres le résultat suivant, qui répond à, et a été motivé par, une question posée par Anand Pillay, que nous remercions vivement.

**Théorème 1.1** *Soit  $f : X \rightarrow S$  une application holomorphe surjective à fibres connexes entre la variété Kähler compacte  $X$  et l'espace analytique complexe  $S$ . Soit  $X_s$  une fibre lisse de  $f$ . Alors  $f$  est isotriviale dans chacun des trois cas suivants:*

1.  $X_s$  est une variété hyperkählérienne sans facteur algébrique (ceci est réalisé, par exemple si la dimension algébrique  $a(X_s)$  est nulle).
2.  $X_s$  est un tore complexe non projectif et irréductible en poids 2.
3.  $X_s$  est la variété de Kummer associée à un tore complexe non projectif et irréductible en poids 2.

Le cas 1. était établi dans [Ca89] par une toute autre approche lorsque  $S$  est de dimension algébrique 0.

La démonstration sera donnée dans les §2-5.

**Remarque 1.2** Si l'on ne suppose pas que  $X$  est compacte Kähler, la conclusion peut être en défaut dans chacun des trois cas: l'espace des twisteurs  $Z$  associé à une famille de Calabi de structures complexes sur  $F$ , une surface  $K3$  Ricci-plate et non projective, est une variété complexe compacte de dimension complexe 3 munie d'une submersion holomorphe non isotriviale  $f : Z \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  dont les fibres sont des surfaces  $K3$ , donc hyperkähleriennes irréductibles. Mais  $Z \notin \mathcal{C}$ , car  $Z$  est rationnellement connexe, donc  $h^{2,0}(Z) = 0$ . Cependant,  $Z$  n'est pas projective, et donc pas Kähler, car la fibre  $F$  ne l'est pas. Or, un théorème de Kodaira (utilisé crucialement ci-dessous) affirme que si  $X$  est Kähler non projective, on a  $h^{2,0}(X) \neq 0$ .

On peut construire de la même façon des exemples similaires avec  $X_s$  un tore complexe irréductible en poids 2 non projectif de dimension 2, ou la surface de Kummer associée à un tel tore (Variétés de Blanchard. Voir [U75], Exemple 9.9, p. 105).

Il existe, par contre, de nombreuses fibrations non isotriviales  $f : X \rightarrow S$  avec  $X$  projective et à fibres lisses hyperkähleriennes irréductibles.

Remarquons enfin que les variétés  $X_s$  apparaissant dans l'énoncé de 1.1 sont générales dans leur famille de déformation (sauf si  $n = 2$  dans le cas 3).

## 1.4 Motivation: les variétés simples.

Rappelons que  $X_s$  (compacte Kähler connexe) est dite *simple* si elle n'est pas recouverte par ses sous-espaces analytiques complexes compacts de dimension  $p$ , pour  $0 < p < n$ . La structure des variétés compactes Kähler arbitraires peut-être réduite, au moyen de fibrations appropriées, à celles des variétés de Moishezon et des variétés simples. Le nombre de fibrations nécessaires serait indépendant de la dimension si la question suivante avait une réponse affirmative.

**Question 1.3** Soit  $f : X \rightarrow S$  holomorphe surjective et connexe, avec  $X$  compacte Kähler. Si  $X_s$  est simple, alors  $f$  est-elle isotriviale?

Les tores complexes simples non projectifs, ainsi que leurs variétés de Kummer associées sont simples. Les variétés hyperkähleriennes irréductibles *générales* (dans leurs familles de déformations) semblent devoir être simples (exemples: les surfaces  $K3$  ou abéliennes et les déformations générales de leurs produits symétriques désingularisés). Le théorème 1.1 est donc un test pour cette question.

Inversement:

**Question 1.4** Soit  $X$  une variété Kählérienne compacte simple, telle que  $q(X') = 0$ , pour tout  $X'$  génériquement fini sur  $X$ . Alors  $X$  est-elle de dimension paire  $n = 2m$ , et a-t-elle une unique (à homothétie complexe près) 2-forme holomorphe, cette forme étant de rang maximum  $2m$  sur un ouvert de Zariski non vide  $U$  de  $X$ ? De plus,  $X$  a-t-elle un modèle minimal (à singularités terminales) ayant un fibré canonique de torsion?

Remarquons que l'on ne sait pas exclure l'existence de telles  $X$  en dimension 3, à moins d'admettre l'existence d'une théorie de Mori Kählérienne en cette dimension ([Pe01]).

Ces questions sont aussi posées indépendamment par A. Pillay, dont les motivations viennent de la théorie des Modèles (voir [P-S02]). De ce point de vue, il s'agit de savoir si la classe des variétés Kähler compactes est *non-multidimensionnelle*, c'est-à-dire si lorsque  $f : X \rightarrow Y$  est une fibration, avec  $X$  compacte Kähler, et si  $a, b \in Y$  sont génériques, il existe un sous-espace analytique compact irréductible non-trivial de  $X_a \times X_b$  se projetant surjectivement sur chacun des facteurs. Le cas général peut être réduit au cas où  $X_a$  est *simple* pour  $a \in Y$  général.

**Remarque 1.5** Le présent texte est une version considérablement simplifiée de [C04], où le théorème 1.1 était établi dans le cas hyperkählérien par une méthode compliquée et peu naturelle, faute de disposer de la proposition 2.1, posée sous forme de question. La démonstration donnée ici est due à C. Voisin. L'énoncé 2.1 permet, en particulier, de traiter les tores complexes généraux. Nous la remercions vivement.

## 2 Restriction des 2-formes holomorphes.

**Proposition 2.1** ([Voi04]) *Soit  $f : X \rightarrow S$  une fibration, avec  $X$  une variété kählérienne compacte connexe. Soit  $X_s$  une fibre lisse générique de  $f$ . Si l'application de restriction  $r : H^0(X, \Omega_X^2) \rightarrow H^0(X_s, \Omega_{X_s}^2)$  est nulle, alors  $X_s$  est projective.*

Cette proposition est une version relative du théorème de Kodaira [Kod54], d'après lequel  $X_s$  est projective si  $H^0(X_s, \Omega_{X_s}^2) = 0$ . Elle présente un intérêt indépendant, et de nombreuses applications potentielles.

**Démonstration:** L'application de restriction  $r : H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X_s, \mathbb{C})$  est définie sur  $\mathbb{Q}$  et préserve les types (ie: est compatible avec la décomposition de Hodge). Supposons que la restriction à  $X_s$  de toute 2-forme holomorphe  $u$  sur  $X$  soit nulle. L'image de  $H^2(X, \mathbb{R})$  est donc contenue dans  $H^{1,1}(X_s, \mathbb{R})$  et coïncide avec celle de  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . Mais  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  contient le cône ouvert non vide des classes de Kähler. Par densité, il existe donc  $v \in H^2(X, \mathbb{Q})$  ayant même image par  $r$  qu'une classe de Kähler  $w$  sur  $X$ . La restriction de  $w$  à  $X_s$  est donc une classe de Kähler rationnelle sur  $X_s$ . Le théorème de Kodaira montre que  $X_s$  est projective.

Sous des hypothèses plus restrictives, on obtient la non-nullité de *toutes* les restrictions:

**Proposition 2.2** *Soit  $f : X \rightarrow C$  une fibration, avec  $X$  compacte Kähler, et  $C$  une courbe complexe projective. Si  $X_s$  est une fibre lisse de  $f$ , et si  $b_1(X_s) = 0$ , toute 2-forme holomorphe non-nulle  $u$  sur  $X$  a une restriction  $u_s$  à  $X_s$  qui est non-nulle.*

**Démonstration:** Dans des coordonnées locales  $(t, z)$  sur  $X$ , où  $t$  est une coordonnée sur  $C$ , et  $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$  des coordonnées sur  $X_s$ , on peut écrire sur  $X_s$ :  $0 \neq u = dt \wedge w + u_s$ , où  $w$  est une 1-forme intrinsèquement définie sur  $X_s$ . Donc  $w = 0$ , et  $u_s \neq 0$ .

### 3 Critère d'isotrivialité.

**Définition 3.1** *On dit que  $X$ , compacte Kähler, satisfait le théorème de Torelli local pour les 2-formes holomorphes si les périodes des 2-formes holomorphes sur  $X$  déterminent localement dans son espace de Kuranishi la structure analytique de  $X$ .*

**Exemple 3.2** *Les variétés hyperkähleriennes irréductibles satisfont le théorème de Torelli local pour les 2-formes holomorphes, par [Be83], ainsi que les tores complexes et leurs variétés de Kummer.*

**Définition 3.3** *Soit  $X$  une variété Kählérienne compacte. On dit que  $X$  est irréductible en poids 2 si toute sous-structure de Hodge rationnelle  $V := V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$  de la structure de Hodge sur  $H^2(X, \mathbb{C})$  contient  $H^{(2,0)}(X)$ , si  $0 \neq V^{(2,0)} := V \cap H^{(2,0)}(X)$ .*

#### Exemple 3.4

0. Si  $X$  est irréductible en poids 2, elle n'admet pas de fibration holomorphe non-triviale  $f : X \rightarrow S$  sur une variété kählérienne  $S$  telle que  $h^{(2,0)}(S) \neq 0$ . Un tore irréductible en poids 2 est donc simple, s'il n'admet pas de tore quotient de dimension 1 (donc s'il est de dimension algébrique 0).

1. Si  $H^{(2,0)}(X) = 1$ , et en particulier si  $X$  est hyperkählienne irréductible, alors  $X$  est irréductible en poids 2.

2. Un tore complexe  $X$  complexe de dimension 2, ainsi que sa variété de Kummer  $X'$  associée sont irréductibles en poids 2.

3. En dimension 3 ou plus, un tore complexe général, ainsi que sa variété de Kummer associée sont irréductibles en poids 2. Ce résultat sera établi séparément dans le §4. Il serait intéressant de savoir si les tores simples sont irréductibles en poids 2.

**Proposition 3.5** *Soit  $f : X \rightarrow S$  une fibration, avec  $X$  kähler, telle qu'une fibre lisse  $X_s$  de  $f$  soit irréductible en poids 2 et satisfasse le théorème de Torelli local pour les 2-formes holomorphes.*

*S'il existe, de plus, une 2-forme holomorphe  $u$  sur  $X$  dont la restriction  $u_s$  à  $X_s$  est non-nulle, alors  $f$  est isotriviale.*

**Démonstration:** Par le théorème des cycles invariants de Deligne ([D71] et [D74]; voir [Voi02], §16 pour une exposition particulièrement lisible), valable aussi dans le cas kähler,  $j^*(H^2(X, \mathbb{C}))$  est une sous-structure de Hodge rationnelle de  $H^2(X_s, \mathbb{C})$ , si  $j : X_s \rightarrow X$  est l'inclusion naturelle. Cette structure contient la classe de  $u_s$ , et coïncide donc avec  $H^2(X_s, \mathbb{C})$ , puisque  $X_s$  est supposée irréductible en poids 2. Donc la restriction de  $H^{(2,0)}(X)$  à  $X_s$  coïncide avec  $H^{(2,0)}(X_s)$ . Les formes  $u$  sont  $d$ -fermées. Donc leurs périodes sur  $X_t$  sont indépendantes de  $t \in S^*$  (dans une trivialisatation différentiable locale de  $f$ ), et égales à celles de  $X_s$ . Puisque  $X_t$  satisfait le théorème de Torelli local, on en déduit que  $f$  est isotriviale sur  $S^*$ . On conclut, par exemple, par la compacité de  $Chow(X)$  ([L75]).

**Remarque 3.6** La démonstration de la proposition 3.5 ne fait pas usage du théorème des cycles invariants de Deligne si  $h^{(2,0)}(X_s) = 1$ , et en particulier si  $X_s$  est hyperkähler irréductible.

De la proposition 3.5 et des exemples 3.4 et 3.2, on déduit le:

**Corollaire 3.7** *Soit  $f : X \rightarrow S$  une fibration avec  $X$  kähler, et  $X_s$  une fibre lisse de  $f$ . On suppose qu'il existe sur  $X$  une 2-forme holomorphe dont la restriction à  $X_s$  est non-nulle. Alors  $f$  est isotriviale dans chacun des trois cas suivants:*

1.  $X_s$  est une variété hyperkählérienne irréductible.
2.  $X_s$  est un tore complexe irréductible en poids 2.
3.  $X_s$  est la variété de Kummer associée à un tore complexe irréductible en poids 2.

Le théorème 1.1 en résulte immédiatement, grâce à 2.1, sauf lorsque  $X_s$  est hyperkähler sans facteur algébrique, mais n'est pas irréductible. Ce cas sera traité dans le §.5 ci-dessous.

## 4 Tores irréductibles en poids 2.

Rappelons que si  $S$  est un espace analytique complexe, un point de  $S$  est dit général s'il appartient à une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses de  $S$ . Une variété complexe compacte et connexe est dite générale dans sa famille de déformation si elle l'est dans sa famille de Kuranishi.

La proposition qui suit est certainement bien connue, nous en donnons une preuve, faute d'avoir trouvé une référence adéquate (bien qu'un énoncé analogue pour les variétés abéliennes polarisées se trouve dans [B-L,17.4.1-3]).

**Proposition 4.1** *Les tores complexes irréductibles en poids 2 de dimension  $m \geq 3$  sont généraux dans leur famille de déformation. Plus précisément: le tore général  $T$  de dimension  $m \geq 3$  n'a pas de sous-structure de Hodge rationnelle non-triviale de  $H^2(T, \mathbb{C})$ .*

**Démonstration:** (Voir aussi la remarque 4.2 ci-dessous) On considérera un tore  $T$  comme la donnée d'un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $2m$ , et d'une structure complexe  $J \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ . L'ensemble  $C$  des structures complexes  $J$  sera identifié à la Grassmannienne des  $m$ -plans complexes  $H = H_J^{(0,1)} \subset V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \oplus i.V_{\mathbb{R}}$  tels que:  $H \cap V_{\mathbb{R}} = H \cap i.V_{\mathbb{R}} = \{0\}$ .

Par dénombrabilité de  $\mathbb{Q}$ , il suffit de démontrer que si  $\{0\} \neq W \subset \wedge_{\mathbb{Q}}^2 V$  est un sous-espace vectoriel (défini sur  $\mathbb{Q}$ , donc), et si  $W_{\mathbb{C}}$  est une sous-structure de Hodge de  $(\wedge^2 V)_{\mathbb{C}}$  pour tout  $J \in C$ , alors  $W = \wedge_{\mathbb{Q}}^2 V$ . C'est ce que nous allons maintenant démontrer.

Si  $w \in W$ , on notera  $r(w)$  le rang de  $w$ , c'est-à-dire le plus grand des entiers  $s \geq 0$  tels que  $w^{\wedge s} \neq 0$ . On a, bien sûr:  $0 \leq r(w) \leq m$ .

On distingue 2 cas:

- Premier cas: il existe  $w \in W$  tel que  $r(w) = m$ .

Dans une  $\mathbb{Q}$ -base adéquate  $\{dx_j, dy_j, j = 1, \dots, m\}$  de  $V$ , on a donc:  $w = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge dy_j$ . Soit  $J_0 \in C$  définie par:  $J_0.dx_j := dy_j, \forall j$ . On a donc:  $2w = i. \sum_{j=1}^m dz_j \wedge d\bar{z}_j$ , avec  $dz_j := dx_j + i.dy_j, \forall j$ .

L'espace  $TC_{J_0}$  tangent à  $C$  en  $J_0$  est canoniquement identifié à  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \bar{H})$ , si  $H := H_{J_0}^{(0,1)}$ . On a donc, si  $t \in TC_{J_0}$ , si  $s \in \mathbb{C}$ , et si  $J_s := J_0 + s.t$  (en notant  $\equiv$  l'égalité modulo  $O(|s|^2)$ ):

$d\bar{z}_j = d\bar{z}'_j - s. \sum_{h=1}^m t_{j,h} dz_h$ , ceci pour tout  $j$ , si les  $\{d\bar{z}'_j, \forall j\}$  forment une  $\mathbb{C}$ -base de  $H_{J_s}^{(0,1)}$ . Donc, par un calcul immédiat:

$$2w \equiv i. \sum_{j=1}^m dz'_j \wedge d\bar{z}'_j - i.s. \sum_{1 \leq j < l \leq m} (t_{j,l} - t_{l,j}). dz_j \wedge dz_l + i.\bar{s}. \sum_{1 \leq j < l \leq m} (\bar{t}_{j,l} - \bar{t}_{l,j}). d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_l.$$

Puisque, par hypothèse,  $W_{\mathbb{C}}$  est une sous-structure de Hodge de  $(\wedge^2 V)_{\mathbb{C}}$  pour tout  $J$  de  $C$ , on a:  $\sum_{1 \leq j < l \leq m} (t_{j,l} - t_{l,j}). dz_j \wedge dz_l \in W_{\mathbb{C}}$ , pour tout choix de  $t \in TC_{J_0}$ .

Donc:

$$(*) \text{Re}(dz_j \wedge dz_l) = dx_j \wedge dx_l - dy_j \wedge dy_l \in W$$

et

$$(**) \text{Im}(dz_j \wedge dz_l) = dx_j \wedge dy_l - dx_l \wedge dy_j \in W,$$

ceci pour tous  $1 \leq j < l \leq m$ .

On en déduit que  $w' := w + (dx_k \wedge dy_l - dx_l \wedge dy_k) = \sum_{j=1}^m dx'_j \wedge dy'_j \in W$ , avec:  $dx'_j = dx_j, \forall j$ , et  $dy'_j = dy_j$  si  $j \neq k, l$ , et:  $dy'_k := dy_k + dy_l$ , et enfin:  $dy'_l = dy_l - dy_k$ .

On donc, appliquant les relations (\*) et (\*\*) précédentes à  $w'$ , et en tenant compte de (\*), (\*\*):

$$(* ** )dx_j \wedge dy_k \in W, \forall j \neq k$$

.

$$(* ** *)dy_j \wedge dy_k \in W, \forall j \neq k$$

.

Enfin (puisque  $dx'_k \wedge dx'_l - dy'_k \wedge dy'_l \in W$  et  $dx_k \wedge dx_l - dy_k \wedge dy_l \in W$ ):

$$(+ )dx_k \wedge dy_k + dx_l \wedge dy_l \in W, \forall k \neq l.$$

D'où l'on déduit, puisque  $m \geq 3$ :

$$(++ )dx_j \wedge dy_j \in W, \forall j$$

.

On obtient les dernières égalités cherchées:

$$(++ + )dx_j \wedge dx_k \in W, \forall j \neq k$$

en appliquant (\*\*), comme ci-dessus, à  $w'' := w + (dx_k \wedge dx_l - dy_k \wedge dy_l)$ , pour tous  $k, l$ .

On a donc bien:  $W = \wedge^2 V$  dans ce cas.

• Second cas:  $r(w) \leq (m-1)$  pour tout  $w \in W$ . On va montrer que ce cas ne peut pas se produire. Si  $w \in W$  est de rang maximum  $(r-1) \leq (m-1)$ , on a, comme ci-dessus:  $w = \sum_{j=1}^{j=r} dx_j \wedge dy_j$ .

Soit  $J \in C$  définie par:  $J.dx_j := dy_j, \forall j = 2, 3, \dots, (r-1)$ , tandis que  $J.dx_1 := dx_r$ , et  $J.dy_1 := dy_r$ .

On définit ensuite:  $dz_1 := dx_1 + idy_r$ ,  $dz_r := dy_1 + idy_r$ , et  $dz_j = dx_j + idy_j$  si  $j = 2, 3, \dots, (r-1)$ .

On a alors:  $w = Re(dz_1) \wedge Re(dz_r) + \sum_{j=2}^{j=(r-1)} Re(dz_j) \wedge Im(dz_j)$ , et donc:  $w^{(2,0)} = dz_1 \wedge dz_r$ .

D'où:  $w' := Re(dz_1 \wedge dz_r) = dx_1 \wedge dy_1 - dx_r \wedge dy_r \in W$ . Donc:  $w + w' \in W$ . Or  $r(w + w') = r$ . Contradiction avec notre hypothèse  $r(w'') \leq (r-1), \forall w'' \in W$ . Ce cas ne se produit donc pas.

**Remarque 4.2** (due à C. Voisin) On peut donner des preuves plus courtes et conceptuelles de 4.1 ci-dessus en utilisant, soit la théorie des variations infinitésimales de strctures de Hodge de Griffiths, soit l'action de la monodromie de la famille des tores complexes paramétrée par  $C$ .



## 5 Le cas hyperkähler sans facteur algébrique.

On va réduire le cas  $X_s$  hyperkähler du théorème 1.1 au cas hyperkählérien irréductible grâce au lemme suivant:

**Lemme 5.1** *Soit  $f : X \rightarrow S$  une fibration telle que  $X_s$  soit hyperkählérienne irréductible. Soit  $s \in S^*$  générique. Alors  $X_s$  se décompose de manière unique en un produit de facteurs hyperkählériens irréductibles  $X_{j,s}; j = 1, \dots, k$ , dont le nombre  $k$  de facteurs est constant (égal à  $h^{(0,2)}(X_s)$ ). On note  $r_{j,s} : X_s \rightarrow X_{j,s}$  la projection correspondante.*

*Il existe <sup>1</sup> des fibrations  $r_j : X \rightarrow X_j$  et  $f_j : X_j \rightarrow S, j = 1, \dots, k$ , telles que:*

1.  $f = r_j \circ f_j, \forall j$ .
2.  $X_{j,s} \cong (X_j)_s, \forall j$ , et pour  $s \in S$  générique.
3.  $(r_j)|_{X_s} : X_s \rightarrow X_{j,s} = r_{j,s}, \forall j$ , et pour  $s \in S$  générique.

*(Autrement dit:  $X \cong X_1 \times_S \dots \times_S X_k$  est produit fibré au-dessus de  $S$  de  $k$  fibrations à fibres hyperkählériennes irréductibles, et cette décomposition induit sur  $X_s$  la décomposition en les produits  $X_{j,s}$ ).*

**Démonstration.** Reprenant les notations précédentes, chacun des facteurs  $X_{j,s}$  détermine une projection  $r_{j,s} : X_s \rightarrow X_{j,s}$  sur ce facteur.

On va maintenant utiliser l'espace des cycles  $\mathcal{C}(X)$  d'un espace analytique complexe  $X$  (voir [B75]). Chacune des  $r_{j,s}$  détermine donc une unique composante connexe  $C_{j,s} \cong X_{j,s}$  de  $\mathcal{C}(X_s)$ , celle qui consiste en la famille des fibres de cette projection, affectées de la multiplicité 1. La projection  $r_{j,s} : X_s \rightarrow X_{j,s}$  est alors obtenue naturellement en considérant le graphe  $Z_{j,s} \subset C_{j,s} \times X_s$ : ce graphe est isomorphe à  $X_s$  par la (restriction à  $Z_{j,s}$  de la) seconde projection  $p_{j,s}$ , et si  $q_{j,s}$  est la première projection, la projection de  $X_s$  sur  $X_{j,s}$  est simplement  $q_{j,s} \circ (p_{j,s})^{-1}$ .

On va simplement relativiser cette construction au-dessus de  $S$ .

Le théorème de Baire appliqué à l'espace des cycles relatifs  $f_* : \mathcal{C}(X/S) \rightarrow S$ , constitué du sous-ensemble analytique fermé  $\mathcal{C}(X/S)$  de  $\mathcal{C}(X)$ , réunion de tous les cycles  $Z$  de  $X$  dont le support est contenu dans une fibre  $X_s$  de  $f$ , avec  $s := f_*(Z)$ , montre qu'il existe, pour chaque  $j = 1, \dots, k$ , une unique composante irréductible  $C_j$  de  $\mathcal{C}(X/S)$  telle que  $C_{j,s}$  soit la fibre de  $C_j$  au-dessus de  $s \in S$  générique <sup>2</sup>. Le graphe  $Z_j \subset C_j \times_S X$  de  $C_j$  est alors naturellement biméromorphe à  $X$  au-dessus de  $S$ , et lui est isomorphe au-dessus d'un ouvert de Zariski dense adéquat (par la seconde projection  $p_j$ ). On définit alors  $r_j := q_j \circ (p_j)^{-1} : X \rightarrow C_j := X_j$ ,  $q_j : Z_j \rightarrow C_j$  étant simplement la seconde projection. De même,  $f_j : C_j \rightarrow S$  est simplement la restriction de  $f_*$ . Les propriétés restantes se vérifient par restriction à  $X_s, s \in S$  générique.

<sup>1</sup>après un changement de base fini  $v : S' \rightarrow S$ , notationnellement ignoré ici, pour simplifier.

<sup>2</sup>On remplace, pour chaque  $j$ ,  $S$  par la factorisation de Stein  $S_j$  de  $C_j$  au-dessus de  $S$ . On prend pour nouvelle base  $S'$  une composante irréductible principale du produit fibré des  $S_j$  au-dessus de  $S$ .

On obtient donc le cas  $X_s$  hyperkähler du théorème 1.1 lorsque  $X$  est compacte kähler en appliquant le lemme suivant à chacune des fibrations  $f_j : X_j \rightarrow S$ , puisque par hypothèse, leurs fibres générales sont hyperkähleriennes irréductibles et non algébriques.

## 6 Bibliographie.

- [B75] D. Barlet. Espace analytique réduit des cycles analytiques compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. LNM 482(1975), 1-158
- [Be83] A. Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. J. Differential Geom. 18 (1983), 755–782 .
- [B-L 02] C. Birkenhake-H. Lange. Complex Abelian Varieties. Springer 1980 (Seconde édition 2002).
- [Bo74] F. Bogomolov. The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class. Mat. Sb. 93(135) (1974), 573–575.
- [C89] F. Campana. Geometric algebraicity of moduli spaces of compact Kähler symplectic manifolds. J. f. die reine u. angew. Math. 397 (1989), 202–207.
- [C04] F. Campana. Critère d'isotrivialité pour les familles de variétés hyperkähleriennes sans facteur algébrique. math.AG/0408148.
- [D71] P. Deligne. Théorie de Hodge II. Publ. IHES. 40 (1971), 5-57.
- [D71] P. Deligne. Théorie de Hodge III. Publ. IHES. 44 (1974), 5-77.
- [H03] D. Huybrechts. Finiteness results for compact hyperkähler manifolds. J. f. die reine u. angew. Math. 558 (2003), 15–22.
- [Kod54] K. Kodaira. On Kähler varieties of restricted type. Ann. Math. 60 (1954), 28-48.
- [L75] D. Lieberman. Compactness of the Chow scheme: applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds. LNM 670(1978), 140-186.
- [Pe01] T. Peternell. Towards a Mori theory on compact Kähler threefolds. III. Bull. Soc. Math. France 129 (2001), 339–356.
- [P-S02] A. Pillay- T. Scanlon. Compact complex manifolds with the DOP and other properties. Journal of Symbolic Logic, 67(2002), 737-743.
- [U75] K. Ueno. Classification theory of algebraic varieties and compact complex manifolds. LNM 439 (1975).
- [Ve02] M. Verbitsky. Hyperkähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory. Asian J. Math. 6 (2002), no. 4, 679–712.
- [Voi04] C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe. Collections Cours spécialisés 10. SMF (2002).
- [Voi04] C. Voisin. message électronique. 11/12/04.
- [Y78] S.T. Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339–411.

## 7 Adresse

F.Campana  
Université Nancy 1.  
Département de Mathématiques.  
BP 239  
F. 54506. Vandoeuvre-les-nancy. Cédex.  
campana@iecn.u-nancy.fr